ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES SP TB

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

Le but du problème est la détermination d'approximations rationnelles de zéros non rationnels de polynômes du second degré à coefficients entiers.

On note $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels.

a étant un nombre réel et f une fonction de $\mathscr{F}$, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, A, B, C étant trois constantes, on note $\phi_a(f)$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \phi_a(f)(x) = -x^2 f\left(a + \dfrac{1}{x}\right) \\ \phi_a(f)(0) = -A. \end{cases}$$

$\mathscr{P}$ désignera la partie de $\mathscr{F}$ formée des fonctions polynômes P vérifiant les conditions :

$$(C) \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = Ax^2 + Bx + C \\ A \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad C \in \mathbb{Z} \\ 0 < A \quad \text{et} \quad C < 0 \\ \forall r \in \mathbb{Q}, \quad P(r) \neq 0 \end{cases}$$

où $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Enfin, dans tout le problème, la fonction Q qui illustrera la méthode employée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(I) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3x^2 - 2x - 7.$$

I. Étude de ϕ_a.

1. *a.* f étant une fonction de $\mathscr{F}$, montrer que $\phi_a(f)$ est une fonction polynôme et exprimer ses coefficients à l'aide de $f(a)$, $f'(a)$ et $f''(a)$.

   Montrer que ϕ_a est un endomorphisme de $\mathscr{F}$.

   b. Déterminer la matrice de ϕ_a dans la base (f_0, f_1, f_2) où les fonctions f_0, f_1, f_2 sont définies par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2.$$

   c. ϕ_a est-il diagonalisable ?

Tournez la page S.V.P.

2. Soit P une fonction polynôme de $\mathscr{P}$.

   a. Montrer que P admet une racine strictement positive unique.

   b. Si a est la partie entière de cette racine, montrer que :

   $$P(a) < 0 < P(a+1).$$

   c. En déduire que $\phi_a(P) \in \mathscr{P}$.

   d. Soit Q la fonction polynôme définie par la relation (I). Déterminer la partie entière a de la racine strictement positive de Q. Montrer que Q est un élément de $\mathscr{P}$ et vérifier que $\phi_a(Q)$ appartient à $\mathscr{P}$.

II. Construction d'un algorithme.

Dans ce qui suit, P_0 est une fonction polynôme donnée de $\mathscr{P}$. On note α sa racine strictement positive, a_0 la partie entière de α et on pose $r_0 = a_0$.

1. Soit $P_1 = \phi_{a_0}(P_0)$. D'après la question I.2., on sait que :

   $$P_0(a_0) < 0 < P_0(a_0+1) \quad \text{et} \quad P_1 \in \mathscr{P}.$$

   a. Soit α_1 la racine strictement positive de P_1 et a_1 sa partie entière, montrer que $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ et en déduire que $1 \leqslant a_1$.

   b. On pose $r_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$, montrer que $\alpha < r_1$.

2. On définit une suite de fonctions polynômes (P_n) de $\mathscr{P}$ et une suite d'entiers (a_n) en itérant ce procédé.

   Le premier terme est P_0, le deuxième terme est $P_1 = \phi_{a_0}(P_0)$ étudié dans la question précédente et pour $1 \leqslant n$, le polynôme P_{n+1} est l'élément de $\mathscr{P}$ défini par $P_{n+1} = \phi_{a_n}(P_n)$ où a_n est la partie entière de la racine strictement positive α_n de P_n.

   a. Exprimer les coefficients A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1} de P_{n+1} en fonction des coefficients A_n, B_n, C_n de P_n et de a_n.

   b. Soit α_{n+1} la racine strictement positive de P_{n+1} et a_{n+1} sa partie entière, exprimer α_{n+1} en fonction de α_n et de a_n et montrer que $1 \leqslant a_{n+1}$.

   c. On pose $r_2 = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}}$, $\quad r_3 = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3}}}$

   et plus généralement : $r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$

   Étudier la position de r_n par rapport à α suivant la parité de n.

3. *a.* Écrire un algorithme permettant de calculer A_n, B_n, C_n et a_n, la fonction polynôme P_0 et l'entier naturel non nul n étant donnés.

   b. Soit Q la fonction polynôme définie par la relation (I), déterminer les dix premiers termes de la suite (a_n) associée à ce polynôme Q.

III. **Approximations rationnelles du zéro α.**

Cette partie utilise les suites (a_n) et (r_n) définies dans la partie précédente.

On définit les suites (p_n) et (q_n) par :

$$p_0 = a_0,\ q_0 = 1,\ p_1 = a_0 a_1 + 1,\ q_1 = a_1 ;$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}\quad (p_{k+2} = a_{k+2}\, p_{k+1} + p_k \quad \text{et} \quad q_{k+2} = a_{k+2}\, q_{k+1} + q_k).$$

1. Démontrer que :

   1° $\forall\, k \in \mathbb{N},\quad p_{k+1}\, q_k - p_k\, q_{k+1} = (-1)^k$;

   2° $\forall\, k \in \mathbb{N},\quad p_{k+2}\, q_k - p_k\, q_{k+2} = (-1)^k a_{k+2}$;

   3° $\forall\, k \in \mathbb{N},\quad k \leqslant q_k$.

2. On veut démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

   a. Vérifier que la propriété est vraie pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

   On suppose la propriété démontrée jusqu'à l'ordre N, $2 \leqslant N$, et on se propose de la démontrer à l'ordre $N + 1$.

   Pour cela, N étant fixé dans ce qui suit, on note f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots + \cfrac{1}{a_{N-2} + \cfrac{1}{a_{N-1} + x}}}}}.$$

   b. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ où les coefficients α, β, γ et δ sont des entiers naturels définis à un coefficient multiplicatif près.

   c. Après avoir calculé $f(0)$, $\lim\limits_{+\infty} f$ et $f\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ en fonction d'éléments de la suite (r_n), montrer que :

$$f(x) = \frac{p_{n-2}\, x + p_{n-1}}{q_{n-2}\, x + q_{n-1}}.$$

   d. Conclure en considérant : $f\left(\dfrac{1}{a_N + \dfrac{1}{a_{N+1}}}\right)$.

3. *a.* Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |r_{n+1} - r_n| \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$.

   b. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |\alpha - r_n| < \dfrac{1}{q_n^2}$.

   c. Déduire de ce qui précède que la suite (r_n) converge vers α.

4. *a.* Donner un algorithme permettant de calculer r_n, l'entier n et la suite (a_n) étant donnés.

   b. Calculer r_9, la suite étant celle obtenue pour la fonction Q du II.3.*b*.

Tournez la page S.V.P.

IV. **Périodicité de la suite.**

On veut démontrer que la suite (a_n) est périodique à partir d'un certain rang.

1. Vérifier que la suite (a_n) définie par la fonction Q est périodique.

2. Montrer que les fonctions polynômes P_n définies à la partie I ont toutes le même discriminant; on le notera Δ.

3. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (|B_n| \leqslant \sqrt{\Delta} \text{ et } 0 < A_n \leqslant \frac{\Delta}{4} \text{ et } -\frac{\Delta}{4} \leqslant C_n < 0).$$

4. En déduire que les coefficients A_n, B_n et C_n ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, puis conclure.

E.N.S.A.M T, TA 1992.

SESSION 1992

Mathématiques Problème

(Options T et TA)

Durée : 4 heures

Les candidats sont invités à donner de leurs affirmations des justifications complètes, mais brèves.

Les parties III et IV peuvent être traitées indépendamment des parties I et II.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On note 0 la matrice nulle, I la matrice unité.

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^3$ avec la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique.

Une suite (M_n) d'éléments de $\mathcal{M}$, $M_n = (m_{ij}(n))$ a une limite si chaque suite numérique $m_{ij}(n)$ a une limite, et on pose : $\lim M_n = (\lim m_{ij}(n))$. On admettra que les règles usuelles relatives aux limites de sommes et produits s'appliquent aux sommes et produits matriciels.

Tournez la page S.V.P.